

3) a)

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 10 \\ 10 & 17 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 5720 \\ 3300 \\ 836 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,4 & -0,75 & 0,25 \\ -0,2 & 0,5 & -0,5 \\ -0,1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\|x - \tilde{x}\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|b - \tilde{b}\|$$

$$\|A^{-1}\|_{\infty} = \max\{0,4 + 0,75 + 0,25, 0,2 + 0,5 + 0,5, 0,1 + 1\} = 1,4$$

$$\|b - \tilde{b}\|_{\infty} = 100$$

$$\|b\|_{\infty} = \max\{5720, 3300, 836\} = 5720$$

$$\text{cond}(A) = \|A\|_{\infty} \cdot \|A^{-1}\|_{\infty} = \max\{20+30+10, 10+17+6, 2+3+2\} \cdot 1,4 = 84$$

absoluter Fehler:

$$\|x - \tilde{x}\|_{\infty} \leq \|A^{-1}\|_{\infty} \cdot \|b - \tilde{b}\|_{\infty} \leq 1,4 \cdot 100 = \underline{140}$$

relative Fehler:

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} \leq \text{cond}(A) \cdot \frac{\|b - \tilde{b}\|_{\infty}}{\|b\|_{\infty}} = \underline{84} \cdot \frac{100}{5720} = \underline{1,469}$$

Da die Konditionszahl sehr hoch ist (deutlich über 1)

können kleine Fehler in  $b$  stark verstärkt werden, somit ist es nicht gut konditioniert

$$3b) \frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \frac{\text{cond}(A)}{1 - \text{cond}(A) \cdot \frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|}} \cdot \left( \frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|} + \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|} \right)$$

$$\|A\|_{\infty} = 60$$

$$\text{cond}(A) = 84$$

$$\|b\|_{\infty} = 5720$$

$$\|b - \tilde{b}\|_{\infty} = 100$$

$$\|A - \tilde{A}\|_{\infty} = 0.3$$

$$\frac{\text{cond}(A)}{1 - \text{cond}(A) \cdot \frac{\|A - \tilde{A}\|_{\infty}}{\|A\|_{\infty}}} = \frac{84}{1 - 84 \cdot \frac{0.3}{60}} = 144.828$$

$$\frac{\|A - \tilde{A}\|_{\infty}}{\|A\|_{\infty}} + \frac{\|b - \tilde{b}\|_{\infty}}{\|b\|_{\infty}} = \frac{0.3}{60} + \frac{100}{5720} = 0.022483$$

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq 144.828 \cdot 0.022483 = 3.2561$$

3)d)

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} 7.3829 \\ 58.7660 \\ 395.5532 \end{pmatrix} \leftarrow \text{Phyton}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 19.9 & 29.9 & 9.9 \\ 9.9 & 16.9 & 5.9 \\ 1.9 & 2.9 & 1.3 \end{pmatrix} \text{ Schenk, Brandenberger}$$

$$\|x - \tilde{x}\| = 395.5532 - 264 = 131.553$$

$$\tilde{b} = \begin{pmatrix} 5820 \\ 3400 \\ 936 \end{pmatrix}$$

aus 7)d)

$$x = \begin{pmatrix} 22 \\ 88 \\ 264 \end{pmatrix}$$

relative Fehler

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} = \frac{131.553}{264} = 0.4983$$

$$\|x\|_{\infty} = 264$$

Der relative Fehler ist mit 0.4983 um einiges kleiner als der maximale Fehler von 3.2561