

Aufgabe 1 (ca. 30 Minuten):

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -5 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie manuell die **QR**-Zerlegung der Matrix **A** unter Angabe der wichtigsten Zwischenschritte (dabei auftretende Matrix-Multiplikationen etc. führen Sie aber natürlich mit Python durch)

$$q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$q_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{-24}{30} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$q_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{4}{30} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{5 \cdot 17}{9 \cdot 5} \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{30}} & -\frac{6 \cdot 5 \cdot 2}{8 \cdot 3 \cdot \sqrt{5}} & \frac{5 \cdot 1}{\sqrt{6} \cdot 5} \\ -\frac{5}{\sqrt{30}} & 0 & -\frac{5 \cdot 1}{\sqrt{6} \cdot 5} \\ \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{2 \cdot 8 \cdot 1}{8 \cdot 3 \cdot \sqrt{5}} & \frac{10 \cdot 2}{\sqrt{6} \cdot 5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{30}} & -\frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{5}{\sqrt{30}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} \sqrt{30} & -\frac{24}{\sqrt{30}} & \frac{4}{\sqrt{30}} \\ 0 & \frac{3\sqrt{5}}{5} & -\frac{3}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & \frac{5\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{30} & -\frac{24}{\sqrt{30}} & \frac{4}{\sqrt{30}} \\ 0 & \frac{3\sqrt{5}}{5} & -\frac{3}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & \frac{5\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$$

b) Benutzen Sie die Matrizen **Q** und **R**, um die Lösung **x** zu berechnen.

$$A = Q \cdot R$$

$$Ax = b$$

$$Q \cdot R \cdot x = b$$

$$Rx = Q^T \cdot b$$

$$Q^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{30}} & -\frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$Q^T \cdot b = \begin{pmatrix} \frac{-17 \cdot \sqrt{30}}{15} \\ \frac{3 \cdot \sqrt{5}}{5} \\ \frac{10 \cdot \sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \sqrt{30} & -\frac{24}{\sqrt{30}} & \frac{4}{\sqrt{30}} & \frac{-17 \cdot \sqrt{30}}{15} \\ 0 & \frac{3\sqrt{5}}{5} & -\frac{3}{\sqrt{5}} & \frac{3 \cdot \sqrt{5}}{5} \\ 0 & 0 & \frac{5\sqrt{6}}{3} & \frac{10 \cdot \sqrt{6}}{3} \end{array} \right)$$

$$x_3 = \frac{10 \sqrt{6} \cdot 3}{3 \cdot 5 \sqrt{6}} = \underline{\underline{2}}$$

$$x_2 = \frac{3 \sqrt{5}}{5} - 2 \cdot \frac{-3}{\sqrt{5}} = \underline{\underline{3}}$$

$$x_1 = \frac{-17 \sqrt{30}}{15} - 2 \cdot \frac{4}{\sqrt{30}} - 3 \cdot \frac{-24}{\sqrt{30}} = \underline{\underline{1}}$$