Aufgabe 2 (ca. 45 Min.):

Gegeben ist das Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 2.2 & 3.6 \\ 2.0 & 3.0 & 4.0 \\ 1.2 & 2.0 & 5.8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2.4 \\ 1.0 \\ 4.0 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie manuell die LR-Zerlegung von A. Verwenden Sie dafür den Gauss-Algorithmus mit Spaltenpivotisierung. Berücksichtigen Sie dabei, dass Sie nun auch die Permutionsmatrix P berechnen müssen, so dass $LR = PA$ gilt (siehe Skript). Dieses Verfahren ist auch als Spalten- bzw. Kolonnenmaximumstrategie bekannt.

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 2,2 & 3,6 \\ 2,0 & 3,0 & 4,0 \\ 1,2 & 2,0 & 5,8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2,0 & 3,0 & 4,0 \\ 0,8 & 2,2 & 3,6 \\ 1,2 & 2,0 & 5,8 \end{pmatrix} \; -0,4 \cdot x \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2,0 & 3,0 & 4,0 \\ 0 & 1,0 & 2,0 \\ 1,2 & 2,0 & 5,8 \end{pmatrix} \; -0,6x \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,4 & 1 & 0 \\ 0,6 & ? & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2,0 & 3,0 & 4,0 \\ 0 & 1,0 & 2,0 \\ 0 & 0,2 & 3,4 \end{pmatrix} \; -0,2 \cdot x$$

$$\begin{pmatrix} 2,0 & 3,0 & 4,0 \\ 0 & 1,0 & 2,0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = R \qquad L = \begin{pmatrix} 1,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,4 & 1,0 & 0,0 \\ 0,6 & 0,2 & 1,0 \end{pmatrix} \qquad Pb = \begin{pmatrix} 1,0 \\ 2,4 \\ 4,0 \end{pmatrix}$$

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Zerlegung aus a) manuell die Lösung von $Ax = b$.

$$Ly = Pb$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 \\ 0,4 & 1,0 & 0,0 & 2,4 \\ 0,6 & 0,2 & 1,0 & 4,0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} y_1 = 1 \\ y_2 = 2,4 - 0,4 = 2 \\ y_3 = 4,0 - 0,6 - 0,2 \cdot 2 = 3 \end{array}$$

$$Rx = y$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2,0 & 3,0 & 4,0 & 1 \\ 0 & 1,0 & 2,0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} x_1 = \frac{1-4}{2} = -\frac{3}{2} \\ x_2 = 2 - 2 = 0 \\ x_3 = 3/3 = 1 \end{array}$$

c) Vergleichen Sie Ihre Lösung mit dem Resultat der Python-Funktion *scipy.linalg.lu()*. Importieren Sie dafür die Python Library Scipy. Was stellen Sie bzgl. Vergleich der Resultate L, R, P fest?

```
p:
 [[0. 1. 0.]
 [1. 0. 0.]
 [0. 0. 1.]]
```

```
l:
 [[1.  0.  0. ]
 [0.4 1.  0. ]
 [0.6 0.2 1. ]]
```

```
u:
 [[2. 3. 4.]
 [0. 1. 2.]
 [0. 0. 3.]]
```

Die Ergebnisse stimmen exakt überein.