

## Aufgabe 1 (45 Minuten):

Das Polynom vierten Grades

$$f(x) = 230x^4 + 18x^3 + 9x^2 - 221x - 9$$

besitzt zwei reelle Nullstellen, die erste  $\bar{x}_1$  im Intervall  $[-1, 0]$  und die zweite  $\bar{x}_2$  im Intervall  $[0, 1]$ .

a) Versuchen Sie, diese Nullstellen mit einer Fixpunktiteration  $x_{n+1} \equiv F(x_n)$  bis auf  $10^{-6}$  genau zu bestimmen. Stellen Sie dafür die entsprechende Fixpunktgleichung  $F(x) = x$  auf und wählen Sie geeignete Startwerte gemäss der Abbildung. Was stellen Sie bzgl. der Nullstelle in  $[0, 1]$  fest? Weshalb?

b)  $F(x)$  erreicht auf dem Intervall  $[-0.5, 0.5]$  sein Minimum für  $x = 0$  und sein Maximum für  $x = 0.5$ .  $|F'(x)|$  wird maximal für  $x = 0.5$ . Zeigen Sie, dass für den ersten Fixpunkt  $\bar{x}_1$  auf dem Intervall  $[-0.5, 0.5]$  die Bedingungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt sind und bestimmen Sie  $\alpha$ .

c) Wie häufig müssten Sie gemäss der a-priori Fehlerabschätzung iterieren, damit der absolute Fehler für  $\bar{x}_1$  kleiner als  $10^{-9}$  wird? Entspricht das der Realität?

