Aufgabe 1 (45 Minuten):

Das Polynom vierten Grades

$$f(x) = 230x^4 + 18x^3 + 9x^2 - 221x - 9$$

besitzt zwei reelle Nullstellen, die erste $\bar{x}_1$ im Intervall $[-1, 0]$ und die zweite $\bar{x}_2$ im Intervall $[0, 1]$.

a) Versuchen Sie, diese Nullstellen mit einer Fixpunktiteration $x_{n+1} \equiv F(x_n)$ bis auf 10^{-6} genau zu bestimmen. Stellen Sie dafür die entsprechende Fixpunktgleichung $F(x) = x$ auf und wählen Sie geeignete Startwerte gemäss der Abbildung. Was stellen Sie bzgl. der Nullstelle in $[0, 1]$ fest? Weshalb?

$f(x) = 0$

$230x^4 + 18x^3 + 9x^2 - 221x - 9 = 0 \quad | +221x$

$230x^4 + 18x^3 + 9x^2 - 9 = 221x \quad | : 221$

$F(x) = \dfrac{230x^4 + 18x^3 + 9x^2 - 9}{221} = x \qquad x_1 = -1$

$F(-1) = \dfrac{230 - 18 + \cancel{9} - \cancel{9}}{221} = 0{,}959 \qquad x_{1,1} = 0{,}959$

$F(0{,}959) = \dfrac{194{,}761 + 15{,}889 + 8{,}282 - 9}{221} = 0{,}949$

$X_2 = 1$

$F(1) = \dfrac{230 + 18 + \cancel{9} - \cancel{9}}{221} = 1{,}12$

b) $F(x)$ erreicht auf dem Intervall $[-0.5, 0.5]$ sein Minimum für $x = 0$ und sein Maximum für $x = 0.5$. $|F'(x)|$ wird maximal für $x = 0.5$. Zeigen Sie, dass für den ersten Fixpunkt $\bar{x}_1$ auf dem Intervall $[-0.5, 0.5]$ die Bedingungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt sind und bestimmen Sie α.

c) Wie häufig müssten Sie gemäss der a-priori Fehlerabschätzung iterieren, damit der absolute Fehler für $\bar{x}_1$ kleiner als 10^{-9} wird? Entspricht das der Realität?