**Aufgabe 1 (45 Minuten):**

Das Polynom vierten Grades

$$f(x) = 230x^4 + 18x^3 + 9x^2 - 221x - 9$$

besitzt zwei reelle Nullstellen, die erste $\bar{x}_1$ im Intervall $[-1, 0]$ und die zweite $\bar{x}_2$ im Intervall $[0, 1]$.

a) Versuchen Sie, diese Nullstellen mit einer Fixpunktiteration $x_{n+1} \equiv F(x_n)$ bis auf $10^{-6}$ genau zu bestimmen. Stellen Sie dafür die entsprechende Fixpunktgleichung $F(x) = x$ auf und wählen Sie geeignete Startwerte gemäss der Abbildung. Was stellen Sie bzgl. der Nullstelle in $[0, 1]$ fest? Weshalb?

$f(x) = 0$

$230x^4 + 18x^3 + 9x^2 - 221x - 9 = 0 \quad | + 221x$

$230x^4 + 18x^3 + 9x^2 - 9 = 221x \quad | : 221$

$F(x) = \dfrac{230x^4 + 18x^3 + 9x^2 - 9}{221} = x$

Startwert x0: -1
Nullstelle xn: -0.04065928831575886

Für das Intervall [0.0. 1.0] ist die Steigung immer > 1 und damit ist f(x) keine Kontraktion.
Es handelt sich darum hier um einen abstossenden Fixpunkt.

b) $F(x)$ erreicht auf dem Intervall $[-0.5, 0.5]$ sein Minimum für $x = 0$ und sein Maximum für $x = 0.5$. $|F'(x)|$ wird maximal für $x = 0.5$. Zeigen Sie, dass für den ersten Fixpunkt $\bar{x}_1$ auf dem Intervall $[-0.5, 0.5]$ die Bedingungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt sind und bestimmen Sie $\alpha$.

Für x ϵ [-0.5, 0.5] gilt F(x) ≥ (-223/1768) und F(x) ≤ (79/1768), also
# F : [-0.5, 0.5] -> [-0.5, 0.5].
Die Bedingungen des Bachanschen Fixpunktsatzes sind also erfüllt.
x ϵ [-0.5, 0.5]: |F'(0.5)| = |(920 * x ** 3 + 54 * x ** 2 + 18 * x) / 221|
≤ (275/442) = 0.6222
α = 0.6222.

c) Wie häufig müssten Sie gemäss der a-priori Fehlerabschätzung iterieren, damit der absolute Fehler für $\bar{x}_1$ kleiner als $10^{-9}$ wird? Entspricht das der Realität?

|xn - x-quer| ≤ 10 ** -9 ≤ (a ** n / 1 - a) * (x1-quer - x0) -> |Werte einsetzen
0 ** -9 ≤ ((275/442) ** n / (1 - (275/442))) * (927/1768) -> |n auf eine Seite bringen
(275/442) ** n ≥ 10 ** -9 * (1 - (275/442)) / (927/1768) -> | ln, /(275/442)
n ≤ ln(10 ** -9 * (1 - (275/442))) / (927/1768)) / ln(275/442)
n ≤ 37.3423
a = (275/442)
x0 = -0.5
F(x) = (230 * x ** 4+ 18 * x ** 3 + 9 * x ** 2 - 9) / 221
x1-quer = F(x0) = F(-0.5) = (43 / 1768)
|x1-quer - x0| = (927/1768)

Gemäss der a-priori-Abschätzung müssen mindestens 38 Iterationen vorgenommen werden.
Nein, denn die a-priori-Einschatzung ist immer pessimistischer als die'
'a-posteriori-Einschatzung. Eine Simulation mit dem obigen Algorithmus für 10 ** -9'
'ergibt bereits eine ausreichende Genauigkeit nach 5-Iterationen.