

Aufgabe 1 (ca. 20 Min.):

Betrachten Sie einen vereinfachten Rechner, der im Dezimalsystem arbeitet mit einer zehnstelligen Gleitpunktarithmetik (also $n = 10$ für die Mantisse) und einem beliebig grossen Exponenten. Erklären Sie anhand einer kurzen konkreten Berechnung, weshalb für eine positive Zahl $x \neq 0$, die kleiner als die Maschinengenauigkeit eps ist, wegen Rundung $1 + x$ nicht mehr korrekt berechnet werden kann, wohingegen es keine Probleme bereitet, z.B. \sqrt{x} oder $x/10^9$ richtig zu berechnen.

Tipp: Berechnen Sie eps , nehmen Sie für x eine konkrete Zahl $< eps$ an, berechnen Sie die obigen Grössen und normieren Sie sie wie in Kap. 2 des Skriptes.

$$eps := \frac{B}{2} \cdot B^{-n} = \frac{1}{2} \cdot B^{1-n} = \frac{1}{2} \cdot 10^{1-10} = 5 \cdot 10^{-10}$$

Beispiel: $x = 3 \cdot 10^{-11} = 0,3 \cdot 10^{-12} \Rightarrow x + 1 = 0.100000000003 \cdot 10^1$

gerundet: $x = 0 \Rightarrow x + 1 = 1$ x kann mit einer Mantisse der Länge 1 dargestellt werden.

$\sqrt{x} \approx 0,5477 \cdot 10^{-8}$ Für $x + 1$ würde eine Mantisse der Länge 12 benötigt werden.
um diese Zahl genau darzustellen genügt eine Mantisse der Länge 10. Auch die Zwischenergebnisse können problemlos dargestellt werden.

$\frac{x}{10^9} = x \cdot 10^{-9} = 0,3 \cdot 10^{-21}$ Die Mantisse bleibt genau gleich wie bei x . Es ändert sich nur der Exponent. Somit muss nichts gerundet werden.

wesentliche Rundungsfehler entstehen nur wenn Zahlen addiert oder subtrahiert werden, die um ein 10^{10} fache grösser oder kleiner sind

Aufgabe 2 (ca. 20 Min.):

Ist das Potenzieren ($f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$) bzw. das Wurzelziehen ($f(x) = x^{\frac{1}{n}}, n \in \mathbb{N}$) einer reellen Zahl x gut oder schlecht konditioniert? Begründen Sie! Was hat das für Auswirkungen auf die Auswertung von Polynomen für grosse n ?

Aufgabe 3 (ca. 40 Min.):

Betrachten Sie die folgenden Aussagen:

(I) Der Graph einer Exponentialfunktion $f(x) = c \cdot a^x$ in einem Koordinatensystem mit logarithmischer y-Achse ist eine Gerade.

(II) Der Graph einer Potenzfunktion $f(x) = c \cdot x^a$ ist eine Gerade, wenn man beide Koordinatenachsen logarithmisch wählt.

a) Beweisen Sie diese beiden Aussagen zuerst für sich selbst analytisch (Tipp: berechnen Sie $y = \log f(x) = \dots$). Geben Sie dann den y-Achsenabschnitt und Steigung der untenstehenden Funktionen in dem Koordinatensystem an, in dem der Funktionsgraph eine Gerade ist.

(i) $f(x) = \frac{5}{\sqrt[3]{2x^2}}$

(ii) $g(x) = 10^5 \cdot (2e)^{-x/100}$

(iii) $h(x) = \left(\frac{10^{2x}}{2^{5x}}\right)^2$