

## Aufgabe 1 (ca. 20 Min.):

Betrachten Sie einen vereinfachten Rechner, der im Dezimalsystem arbeitet mit einer zehnstelligen Gleitpunktarithmetik (also  $n = 10$  für die Mantisse) und einem beliebig grossen Exponenten. Erklären Sie anhand einer kurzen konkreten Berechnung, weshalb für eine positive Zahl  $x \neq 0$ , die kleiner als die Maschinengenauigkeit  $\epsilon_{ps}$  ist, wegen Rundung  $1 + x$  nicht mehr korrekt berechnet werden kann, wohingegen es keine Probleme bereitet, z.B.  $\sqrt{x}$  oder  $x/10^9$  richtig zu berechnen.

Tipp: Berechnen Sie  $\epsilon_{ps}$ , nehmen Sie für  $x$  eine konkrete Zahl  $< \epsilon_{ps}$  an, berechnen Sie die obigen Grössen und normieren Sie sie wie in Kap. 2 des Skriptes.

$$\epsilon_{ps} := \frac{B}{2} \cdot B^{-n} = \frac{1}{2} \cdot B^{1-n} = \frac{1}{2} \cdot 10^{1-10} = 5 \cdot 10^{-10}$$

Beispiel:  $x = 3 \cdot 10^{-11} = 0,3 \cdot 10^{-12} \Rightarrow x + 1 = 0.100000000003 \cdot 10^1$

gerundet:  $x = 0 \Rightarrow x + 1 = 1$   $x$  kann mit einer Mantisse der Länge 1 dargestellt werden. Für  $x + 1$  würde eine Mantisse der Länge 12 benötigt werden.

$\sqrt{x} \approx 0,5477 \cdot 10^{-8}$  um diese Zahl genau darzustellen genügt eine Mantisse der Länge 10. Auch die Zwischenergebnisse können problemlos dargestellt werden.

$\frac{x}{10^9} = x \cdot 10^{-9} = 0,3 \cdot 10^{-21}$  Die Mantisse bleibt genau gleich wie bei  $x$ . Es ändert sich nur der Exponent. Somit muss nichts gerundet werden.

wesentliche Rundungsfehler entstehen nur wenn Zahlen addiert oder subtrahiert werden, die um ein  $10^{10}$  fache grösser oder kleiner sind

## Aufgabe 2 (ca. 20 Min.):

Ist das Potenzieren ( $f(x) = x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ) bzw. das Wurzelziehen ( $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ) einer reellen Zahl  $x$  gut oder schlecht konditioniert? Begründen Sie! Was hat das für Auswirkungen auf die Auswertung von Polynomen für grosse  $n$ ?

Das Potenzieren und Wurzelziehen ist schlecht konditioniert, da es bei grossen  $n$  eine grosse Fehlerfortpflanzung gibt.

Wenn  $n$  gross ist kann ein sehr kleiner Rundungsfehler in  $x$  einen grossen relativen Fehler im Endergebnis bewirken.

## Aufgabe 3 (ca. 40 Min.):

Betrachten Sie die folgenden Aussagen:

(I) Der Graph einer Exponentialfunktion  $f(x) = c \cdot a^x$  in einem Koordinatensystem mit logarithmischer y-Achse ist eine Gerade.

(II) Der Graph einer Potenzfunktion  $f(x) = c \cdot x^a$  ist eine Gerade, wenn man beide Koordinatenachsen logarithmisch wählt.

a) Beweisen Sie diese beiden Aussagen zuerst für sich selbst analytisch (Tipp: berechnen Sie  $y = \log f(x) = \dots$ ). Geben Sie dann den y-Achsenabschnitt und Steigung der untenstehenden Funktionen in dem Koordinatensystem an, in dem der Funktionsgraph eine Gerade ist.

(i)  $f(x) = \frac{5}{\sqrt[3]{2x^2}}$

(ii)  $g(x) = 10^5 \cdot (2e)^{-x/100}$

(iii)  $h(x) = \left(\frac{10^{2x}}{2^{5x}}\right)^2$

(I)  $\log f(x) = \log(c \cdot a^x) = x \cdot \log(a) + \log(c) \Rightarrow$  Lineare Funktion mit Steigung  $\log(a)$  und y-Achsenabschnitt  $\log(c)$

(II)  $\log f(x) = \log(c \cdot x^a) = a \cdot \log(x) + \log(c) \Rightarrow$  Log Funktion  
 $a/2 \cdot x + c \Rightarrow$  Lineare Funktion mit Steigung  $a/2$  y-Achsenabschnitt  $c$