HM1 Übungsserie 3 Schenk, Brandenberger

Aufgabe 1 (ca. 20 Min.):

Betrachten Sie einen vereinfachten Rechner, der im Dezimalsystem arbeitet mit einer zehnstelligen Gleitpunktarithmetik (also $n = 10$ für die Mantisse) und einem beliebig grossen Exponenten. Erklären Sie anhand einer kurzen konkreten Berechnung, weshalb für eine positve Zahl $x \neq 0$, die kleiner als die Maschinengenauigkeit eps ist, wegen Rundung $1 + x$ nicht mehr korrekt berechnet werden kann, wohingegen es keine Probleme bereitet, z.B. $\sqrt{x}$ oder $x/10^9$ richtig zu berechnen.

Tipp: Berechnen Sie eps, nehmen Sie für x eine konkrete Zahl $< eps$ an, berechnen Sie die obigen Grössen und normieren Sie sie wie in Kap. 2 des Skriptes.

$eps := \frac{B}{2} \cdot B^{-n} = \frac{1}{2} \cdot B^{1-n} = \frac{1}{2} \cdot 10^{1-10} = 5 \cdot 10^{-10}$

Beispiel: $x = 3 \cdot 10^{-11} = 0{,}3 \cdot 10^{-12}$ => x + 1 = $0.100000000003 \cdot 10^{1}$

gerundet: x = 0 => x + 1 = 1

x kann mit einer Mantisse der Länge 1 dargestellt werden.
Für x + 1 würde eine Mantisse der Länge 12 benötigt werden.

$\sqrt{x} \approx 0{,}5477 \cdot 10^{-8}$ um diese Zahl genau darzustellen genügt eine Mantisse der Länge 10. Auch die zwischenergebnisse können Problemlos dargestellt werden.

$\frac{x}{10^9} = x \cdot 10^{-9} = 0{,}3 \cdot 10^{-21}$ Die Mantisse bleibt genau gleich wie bei x. Es ändert sich nur der Exponent. Somit muss nichts gerundet werden.

wesentliche Rundungsfehler entstehen nur wenn Zahlen addiert oder subtrahiert werden, die um ein das 10^10 fache grösser oder kleiner sind

Aufgabe 2 (ca. 20 Min.):

Ist das Potenzieren ($f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$) bzw. das Wurzelziehen ($f(x) = x^{\frac{1}{n}}$, $, n \in \mathbb{N}$) einer rellen Zahl x gut oder schlecht konditioniert? Begründen Sie! Was hat das für Auswirkungen auf die Auswertung von Polynomen für grosse n?

Das Potenzieren und Wurzelziehen ist schlecht konditioniert, da es bei grossen n eine grosse Fehlerfortpflanzung gibt.
Wenn n gross ist kann ein sehr kleiner Rundungsfehler in x einen grossen relativen Fehler im Endergebnis bewirken.

Aufgabe 3 (ca. 40 Min.):

Betrachten Sie die folgenden Aussagen:

(I) Der Graph einer Exponentialfunktion $f(x) = c \cdot a^x$ in einem Koordinatensystem mit logarithmischer y-Achse ist eine Gerade.

(II) Der Graph einer Potenzfunktion $f(x) = c \cdot x^a$ ist eine Gerade, wenn man beide Koordinatenachsen logarithmisch wählt.

a) Beweisen Sie diese beiden Aussagen zuerst für sich selbst analytisch (Tipp: berechnen Sie $y = \log f(x) = ...$). Geben Sie dann den y-Achsenabschnitt und Steigung der untenstehenden Funktionen in dem Koordinatensystem an, in dem der Funktionsgraph eine Gerade ist.

(i) $f(x) = \frac{5}{\sqrt[3]{2x^2}}$

(ii) $g(x) = 10^5 \cdot (2e)^{-x/100}$

(iii) $h(x) = (\frac{10^{2x}}{2^{5x}})^2$

(I) $\log f(x) = \log (c \cdot a^x)$ = x * log(a)+log(c) => Lineare Funktion mit Steigung log(a) und y-Achsenabschnitt log(c)

(II) $\log f(x) = \log (c \cdot x^a)$ a * log(x) + log(c) => Log Funktion
a/2 * x + c => Lineare Funktion mit
Steigung a/2 y-Achsenabschnitt c