a) konvergiert falls diagonaldominant

|8| > |5| + |2|
|9| > |5| + |1|
|7| > |4| + |2| ✓ ist diagonaldominant

b)

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

$$x^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad x^1 \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$x^3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(L+R)\,x^{(k)} + D^{-1}b$$

$$x^{(k+1)} = B\,x^{(k)} + D^{-1}b$$

$$x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}625 & -0{,}25 \\ -0{,}55 & 0 & -0{,}11 \\ -0{,}57 & -0{,}286 & 0 \end{pmatrix} x^k + \begin{pmatrix} 2{,}375 \\ 0{,}55 \\ 4{,}86 \end{pmatrix}$$

c) $|x_n - \overline{x}| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} |x_n - x_{n-1}|$ a-posteriori Abschätzung

$\alpha = 0{,}875$

$\leq \frac{0{,}875}{0{,}125} \cdot \left\| \begin{pmatrix} 2{,}21 \\ -0{,}65 \\ 4{,}38 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1{,}44 \\ -1{,}20 \\ 3{,}67 \end{pmatrix} \right\|_\infty$

$\|x^3 - \overline{x}\| \leq 7 \cdot 0{,}769 = 5{,}385$

d) $|x_n - \overline{x}| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} |x_1 - x_0|$ a-priori Abschätzung

$0{,}0001 \leq \frac{0{,}875^n}{0{,}125} \cdot \left\| \begin{pmatrix} 2{,}25 \\ -0{,}33 \\ 4{,}57 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|_\infty$

$0{,}0001 \leq \frac{0{,}875^n}{0{,}125} \cdot 1{,}5714$

$0{,}875^n \geq \frac{0{,}0001 \cdot 0{,}125}{1{,}5714} = 7{,}95 \cdot 10^{-6}$

$n \geq \frac{\log(7{,}95 \cdot 10^{-6})}{\log(0{,}875)} = 87{,}93$

e) $0{,}0001 \leq \frac{0{,}875^n}{0{,}125} \cdot \left\| \begin{pmatrix} 2{,}21 \\ -0{,}65 \\ 4{,}38 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1{,}44 \\ -0{,}65 \\ 4{,}38 \end{pmatrix} \right\|_\infty$

$$0{,}0001 \leq \frac{0{,}875^n}{0{,}125} \cdot 0{,}7693$$

$$0{,}875^n \geq \frac{0{,}0001 \cdot 0{,}125}{0{,}7693} = 1{,}625 \cdot 10^{-5}$$

$$n \geq \frac{\log(1{,}625 \cdot 10^{-5})}{\log(0{,}875)} = 82{,}58$$